

# EL PROBLEMA DE BASILEA Y LA SOLUCIÓN DE EULER



JOSÉ MANUEL SÁNCHEZ MUÑOZ

*Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos. Profesor de Enseñanza Secundaria en Extremadura. Grupo de Innovación Educativa “Pensamiento Matemático”, Universidad Politécnica de Madrid.*

## RESUMEN

Normalmente la demostración de un problema matemático abierto no supone metafóricamente hablando el cierre de una puerta, sino el nacimiento de nuevas teorías y campos en los que investigar. El problema de Basilea significó no sólo un trampolín en la carrera de un joven Leonhard Euler, sino el germen de una de las herramientas fundamentales en Teoría de Números como es la Función Zeta.

**Palabras Clave:** Euler, Basilea, Función Zeta de Riemann.

\* \* \*

## 1. ORIGEN HISTÓRICO DEL PROBLEMA

El nombre del problema proviene de la ciudad natal de Leonhard Euler (1707-1783) y de quizás una de las familias de matemáticos más notables de la historia, Los Bernoulli, y consiste básicamente en hallar la suma infinita de los recíprocos de los cuadrados de los números naturales, esto es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad (1)$$

Con anterioridad al propio Euler, el problema había sido planteado por primera vez en 1644 en la obra “*Novae Quadraturae Arithmeticae*” de Pietro Mengoli (1625-1686), alumno aventajado de Bonaventura Cavalieri (1598-1647), prior de la iglesia de Santa María Magdalena de Bolonia y sustituto de su maestro como profesor en la Universidad de Bolonia. La obra anteriormente descrita está formada por tres libros, y en el primero Mengoli demostró la convergencia e incluso calculó la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

que desde entonces es conocida como *serie de Mengoli*<sup>1</sup>. La serie de Mengoli constituye un ejemplo clásico de la serie telescópica.

Planteado el reto por MENGOLI, muchos fueron los matemáticos que posteriormente intentarían sin éxito encontrar la solución a dicho problema. Uno de los primeros que lo abordó fue el británico JOHN WALLIS (1616-1703), que en su obra “*Arithmetica Infinitorum*” (1655) aproximó el valor de dicha serie a 1,645 cometiendo un error menor que una milésima, lo que con la notación moderna supondría tener que evaluar 1.071 términos de esta serie.

GOTTFRIED W. LEIBNIZ (1646-1716), coinventor del Cálculo junto a ISAAC NEWTON (1643-1727), conoció el Problema de Basilea en 1673, cuando el por entonces primer secretario de la Royal Society of London, HENRY OLDENBURG (1616-1716) se lo propuso en una de sus comunicaciones por carta. Una vez LEIBNIZ se familiarizó con el problema, no era de extrañar que LOS BERNOULLI también se interesaran por él, en tanto en cuanto LEIBNIZ era mentor de varios miembros de dicha familia. En 1689, JAKOB BERNOULLI (1645-1705), hermano del maestro y mentor de Euler, JOHANN BERNOULLI (1667-1748), a pesar de no hallar la anhelada suma de los infinitos términos de la serie, consiguió revelar y publicar dos resultados sobre dicha serie a todas luces fundamentales<sup>2</sup>. El primero es que se trataba de una serie convergente (aunque lo hacía muy lentamente) ya que todas las series de tipo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$$

<sup>1</sup> Se demuestra que:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \left( 1 - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{k+1} \rightarrow 1, \text{ cuando } k \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Como curiosidad MENGOLI denominó a los números de la forma  $n(n+1)$  con  $n \hat{=} \mathbb{N}$ , números planos, para diferenciarlos de los números de la forma  $n(n+1)(n+2)$  que estudia en el 2º libro de dicha obra y que denomina números sólidos.

<sup>2</sup> Parece ser muy probable que EULER conociera el problema a través de JAKOB BERNOULLI.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 2$$

con  $k \geq 2$  cumplen que

además como el  $n$ -ésimo número triangular es menor que el  $n$ -ésimo recíproco cuadrado, si se invierten se tendrá que

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{T_n}$$

por lo tanto se puede concluir que la serie está acotada por 2. El criterio de convergencia que hoy día resulta fundamental y es lo primero que se busca en una serie, no era por entonces tenido demasiado en cuenta con el mismo rigor con el que ahora se busca, ya que durante aquellos años los matemáticos lejos de proporcionar una demostración impecable, estaban mucho más interesados en demostrar resultados.

Los estudios de Jakob Bernoulli para encontrar la solución analítica del problema desembocaron en un segundo resultado detallado a continuación. Partiendo de la serie original

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

multiplicó ambos miembros por  $2^{-2}$  obteniendo

$$\frac{1}{2^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2^2} \left( 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right) = \left( \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots \right)$$

es decir la suma de los términos pares de dicha serie. Restando estos a la serie original resulta que la suma de los términos impares será por lo tanto:

$$\begin{aligned} \left( 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \left( 1 - \frac{1}{2^2} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \\ &= \frac{2^2 - 1}{2^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

Previa a la irrupción de la figura de EULER, el problema experimenta varios intentos infructuosos de ser demostrado. Sin embargo comienza una carrera vertiginosa por alzarse con el honor de dar el mayor número de cifras exactas. Ha de considerarse que la convergencia de la serie es extremadamente lenta, recuerde el lector que se necesita-

rían 1.071 términos para dar una precisión de tan sólo tres cifras decimales. En 1721, en una carta de JOHANN a su hijo DANIEL BERNOULLI (1700-1782), éste especifica que el resultado de la suma se encuentra en torno al valor  $\frac{8}{5}$ . En 1729 CHRISTIAN GOLDBACH (1690-1764), con el que el propio EULER mantuvo durante toda su vida un intercambio de una muy productiva correspondencia, acotó la solución entre  $\frac{41}{35}$  y  $\frac{5}{3}$ , y en 1730 JAMES STIRLING (1692-1770) en su libro "*Methodus Differentialis*", da la cifra 1,644934066, correcta hasta la novena cifra decimal.

## 2. LOS PRIMEROS INTENTOS DE EULER

En 1731, irrumpe en el contexto del problema la figura de un jovencísimo EULER. En su artículo "*De summatione innumerabilium progressionum*", publicado en 1738, utiliza un método completamente vanguardista para aproximar la serie. EULER parte de la serie de potencias

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots \quad (2)$$

En la expresión divide ambos términos entre  $-x$  e integra entre 0 y  $\frac{1}{2}$ . El término de la derecha resulta

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \dots\right) dx = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2^2}}{4} + \dots + \frac{\frac{1}{2^n}}{n^2} + \dots \quad (3)$$

En el término de la izquierda de la expresión hace la sustitución  $y = 1 - x$  obteniendo

$$\int_0^{\frac{1}{2}} -\frac{\log(1-x)}{x} dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\log(y)}{1-y} dy$$

y observando que

$$\frac{1}{1-y} = \sum_{n=0}^{\infty} y^n$$

se obtiene

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \sum_{n=0}^{\infty} y^n \log(y) dy = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\frac{1}{2}}^1 y^n \log(y) dy$$

Integrando por parte se tiene<sup>3</sup>

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\frac{1}{2}}^1 y^n \log(y) dy = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{y^{n+1}}{n+1} \log(y) - \frac{y^{n+1}}{(n+1)^2} \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^1$$

Agrupando nuevamente, se llega a que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\frac{1}{2}}^1 y^n \log(y) dy = \left( \log(y) \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{n+1}}{n+1} \right] - \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{n+1}}{(n+1)^2} \right] \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^1$$

Pudiendo sustituir la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{n+1}}{n+1} = -\log(1-y)$$

resultando

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\frac{1}{2}}^1 y^n \log(y) dy &= \left( \log(y)(-\log(1-y)) - \left[ y + \frac{y^2}{4} + \frac{y^3}{9} + \dots \right] \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \\ &= \log(1) \log(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \log^2 \left( \frac{1}{2} \right) - \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots \right] \quad (4) \end{aligned}$$

EULER iguala los términos de la derecha de las expresiones (3) y (4) despreciando el producto  $\log(1) \log(0)$ . De este modo llega a que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \log^2(2) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 2^{k-1}} \quad (5)$$

El procedimiento utilizado por EULER, aunque poco riguroso (utiliza la integración de la serie término a término, no considera el producto  $\log(1) \log(0)$ , etc), solventa de forma eficiente la baja velocidad de convergencia de la serie (1). Gracias a las potencias cuadráticas del numerador, los términos de la nueva serie que ha obtenido decaen mucho más rápido, y en consecuencia la convergencia de la misma mejora ostensiblemente. Además, EULER conocía el valor de  $\log(2)$  con una gran cantidad de cifras decimales, consiguiendo de este modo una aproximación de la serie al valor 1,644934,

<sup>3</sup>  $u = \log(y)$ ;  $du = \frac{dy}{y}$ ;  $dv = y^n dy$ ;  $v = \frac{y^{n+1}}{n+1} \Rightarrow \int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$ .

que es correcta en las seis primeras cifras decimales únicamente con la suma de catorce términos de la nueva serie.

### 3. LA DEMOSTRACIÓN DE EULER

A pesar de que EULER había conseguido con la expresión un método bastante rápido de realizar una estimación muy buena de  $\pi$ , sin embargo se desconocía su valor real que era el principal objetivo. No obstante, en 1734 sucedió el desenlace esperado y EULER anunciaba la demostración del resultado definitivo, presentándolo originariamente en la Academia de San Petesburgo y varios años después publicado. Se trataba de una demostración que ponía de manifiesto la gran intuición del joven EULER, aunque sin resultar demasiado rigurosa para los estándares de nuestros días. Gracias a la aparición y al desarrollo del estudio de la teoría de las funciones analíticas en variable compleja en el siglo XIX, fundamentalmente gracias a los trabajos de AUGUSTIN LOUIS CAUCHY (1789-1857) y KARL WEIERSTRASS (1815-1897) sobre factorización infinita de dichas funciones, esta demostración puede combinarse perfectamente con dichos logros y considerarse por lo tanto completamente válida y rigurosa. El lector debe tener presente por lo tanto que EULER no pudo contar en sus investigaciones con multitud de herramientas analíticas surgidas posteriormente. Sin embargo su gran intuición mostraba por primera vez la íntima relación entre un concepto analítico como eran las series, con un concepto puramente geométrico como era la aparición de  $\pi$ .

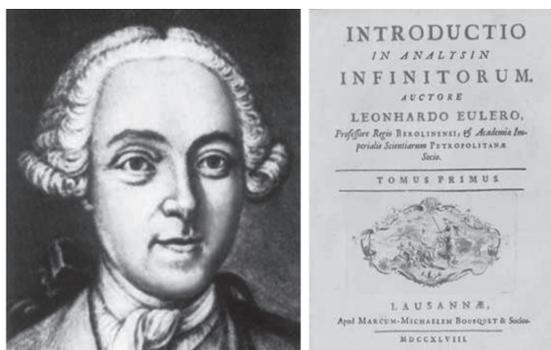


Figura 1. LEONHARDO EULER y portada de “Introductio in Analysin Infinitorum”.

La ingeniosa solución a la que EULER acaba por llegar, hacía uso fundamental de las propiedades de la función trigonométrica seno. Dicha función admite una interpretación geométrica como muestra la figura 2. Como puede observarse, dado un número real  $x$ , se representa el punto  $P$  situado sobre la circunferencia de radio unitario a un ángulo  $x$  (medido en radianes), y se traza el triángulo rectángulo que se obtiene pro-

yectando al punto  $P$  sobre el eje de abscisas. Resulta en este caso que  $\text{sen } x$  es la longitud del cateto opuesto al ángulo, (con signo negativo si se encuentra en el semiplano inferior). Como los catetos son siempre más cortos que la hipotenusa, el seno de un ángulo está siempre acotado entre  $-1$  y  $1$ .

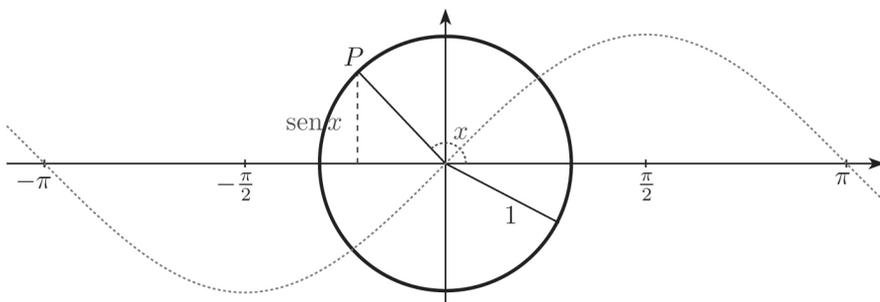


Figura 2. Interpretación geométrica de la función seno.

Gracias a la interpretación geométrica de la figura 2, puede observarse que la función seno es periódica, puesto que un ángulo de  $2\pi$  radianes (o bien  $360^\circ$ ) corresponde a un giro completo en la circunferencia unitaria, por lo tanto el valor de la función seno no sufre variación si le sumamos o restamos múltiplos de  $2\pi$ , y además el valor del seno coincide si sumamos o restamos múltiplos de  $\pi$ , por lo que se puede afirmar que:

$$\text{sen } x = \text{sen}(x + \pi) = \text{sen}(x - \pi) = \text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen}(x - 2\pi) = \dots$$

Para deducir los valores para los que la función seno se anula, se puede suponer que  $x$  está comprendido entre  $0$  y  $\pi$ , ya que en ese caso el punto  $P$  se encuentra en el eje de abscisas. Por lo tanto por la propiedad de la periodicidad de la función seno, los ceros de la misma son los múltiplos de  $\pi$ , es decir, los puntos de la forma  $kn$  con  $k \in \mathbb{Z}$ .

En el caso particular de la función seno, ésta toma infinitas veces el mismo valor, por lo tanto no puede considerarse un polinomio en el sentido estricto de la palabra. Sin embargo el método ingenioso de EULER consiste en imaginar dicha función como un “polinomio infinito”, del que conocía su desarrollo en serie según la fórmula de Taylor:

$$\text{sen } x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (6)$$

En general si  $a_1, a_2, \dots, a_n$  son las raíces de un polinomio  $Q(x)$  de grado  $n$  cuyo término independiente vale 1 (es decir,  $Q(0)=1$ ), entonces  $Q$  se puede factorizar como

$$Q(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) \quad (7)$$

Además, si todas las raíces son distintas de cero, multiplicando y dividiendo por

$$Q(0) = (-1)^n a_1 a_2 \cdots a_n$$

se puede reescribir la expresión como

$$Q(x) = Q(0) \left(1 - \frac{x}{a_1}\right) \left(1 - \frac{x}{a_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{x}{a_n}\right)$$

EULER extendió dicho razonamiento imaginando un “polinomio infinito” con “infinitas” raíces. Sin embargo como cero es precisamente una de las raíces de la función  $\text{sen } x$ , EULER dividió la expresión por  $x$  obteniendo:

$$\frac{\text{sen } x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{2n} \quad \text{con } c_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \quad (8)$$

que puede comprobarse no se anula en cero (de hecho, vale 1), pero que, exceptuando dicho valor, tiene las mismas raíces que la función seno (todos los múltiplos no nulos de  $\pi$ ). Euler expresó (8) como producto infinito, obteniendo

$$\begin{aligned} \frac{\text{sen } x}{x} &= \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{2\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{3\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{3\pi}\right) \cdots = \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right) \cdots = \\ &= 1 - \frac{x^2}{\pi^2} - \frac{x^2}{2^2\pi^2} - \frac{x^2}{3^2\pi^2} + \frac{x^4}{2^2\pi^4} + \frac{x^4}{3^2\pi^4} + \frac{x^4}{2^2 3^2 \pi^4} \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{2n} \end{aligned} \quad (9)$$

donde

$$\begin{aligned}
 b_0 &= 1 \\
 b_1 &= -\frac{1}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\
 b_2 &= \frac{1}{\pi^4} \sum_{1 \leq n_1 < n_2}^{\infty} \frac{1}{n_1^2 n_2^2} \\
 &\dots \\
 b_k &= \left(\frac{-1}{\pi^2}\right)^k \sum_{1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_k}^{\infty} \frac{1}{n_1^2 n_2^2 \dots n_k^2}
 \end{aligned}$$

En este punto, EULER recibió bastantes críticas por la falta de rigor que para muchos existía en su metodología expuesta hasta este punto. Precisamente uno de los más críticos fue JOHANN BERNOULLI, quien le recomendaba que por lo menos demostrase que las raíces especificadas en el producto infinito anteriormente expuesto eran las únicas raíces del seno. Como contraejemplo al razonamiento de EULER, la función

$$e^x \frac{\text{sen } x}{x}$$

tiene las mismas raíces y sin embargo la expresión como producto infinito es diferente. A estas críticas EULER respondió afirmando que los valores aproximados que él obtenía eran parecidos a  $\frac{\pi^2}{6}$ .

Para entonces Euler disponía entonces de dos expresiones diferentes para la misma función, por lo que podía desarrollar el producto e igualar los coeficientes de los términos del mismo grado. Fijándose en el coeficiente de  $x^2$ , para su cálculo el único modo de obtener un múltiplo de  $x^2$  al deshacer el paréntesis es elegir el término  $\frac{x^2}{n^2 \pi^2}$  en uno de los factores y 1 en todos los demás. Por lo tanto, el valor del coeficiente resulta:

$$c_1 = -\frac{1}{\pi^2} \left( \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \right)$$

Este coeficiente debía coincidir con el coeficiente de la serie original, es decir  $c_1 = -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}$ . El lector podrá imaginar la euforia que debió sentir EULER en este momento que lo único que debía hacer era igualar dichos coeficientes y obtener el esquivo resultado durante más de 80 años:

$$-\frac{1}{6} = -\frac{1}{\pi^2} \left( \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \right)$$

la solución al Problema de Basilea resultaba:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Aunque el resultado obtenido es completamente correcto, EULER recibió numerosas críticas por la falta de rigor en su exposición. En el trabajo de EULER no se justificaba que se pudiera tratar la función seno como un polinomio. De hecho, no es cierto que cualquier serie de potencias admita una factorización de este tipo. Sin embargo, gracias a investigaciones del francés JACQUES HADAMARD (1865-1963), se sabe que se necesita una hipótesis relativa al crecimiento de la función cuando  $x$  tiende a infinito. En este sentido EULER tuvo mucha suerte o quizás gozaba de una clarividencia que le permitió dar un paso hacia delante en su demostración ya que en el caso de la función  $\frac{\text{sen } x}{x}$  el condicionante descrito se cumple. Uno de los campos en los que HADAMARD trabajó, se centró en las funciones analíticas que tienen singularidades en el plano finito. Trabajó en el campo de las funciones enteras<sup>4</sup>, como por ejemplo las funciones expresadas en series de potencias que convergen en todos los valores de  $x$ .

Cualquier polinomio  $P(x)$  es obviamente una función entera. Si es mónico (es decir,  $P(0) \neq 0$ ), el polinomio puede ser expresado de la forma

$$P(x) = P(0) \left(1 - \frac{x}{a_1}\right) \left(1 - \frac{x}{a_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{x}{a_n}\right)$$

donde  $a_1, a_2, \dots, a_n$  son las raíces del polinomio  $P(x)$ . Por analogía, el problema de la factorización de las funciones enteras consiste fundamentalmente en su reconstrucción a partir de sus raíces. Puede ocurrir que una función entera tenga raíces o ceros (p. ej.  $e^x$ ), o un número finito (p. ej.  $P(x)e^x$ ), o un número infinito.

El alemán KARL WEIRSTRASS (1815-1897), a la sazón una de las fuentes en las que bebió HADAMARD, había demostrado años antes un resultado crucial con su *Teorema de Factorización*. Dicho teorema (denominado en ocasiones *Teorema del productofactor*) establece que toda función entera  $\varphi(z)$  (analítica en todo el plano complejo) posee una factorización infinita de la forma

$$\varphi(z) = z^m e^{g(z)} \prod_w \left(1 - \frac{z}{w}\right) e^{p_w(z)}$$

<sup>4</sup> Las funciones holomorfas se definen sobre un subconjunto abierto del plano complejo  $\mathbb{C}$  y con valores en  $\mathbb{C}$ , que además son complejo-diferenciables en cada punto. Esta condición es mucho más fuerte que la diferenciabilidad en caso real e implica que la función es infinitamente diferenciable y que puede ser descrita mediante su serie de Taylor. El término función analítica se usa a menudo en vez del de "función holomorfa", especialmente para cuando se trata de la restricción a los números reales de una función holomorfa. Una función que sea holomorfa sobre todo el plano complejo se denomina *función entera*. Cuando se dice que una función es "holomorfa en un punto  $a$ " significa que no sólo es diferenciable en  $a$ , sino que es diferenciable en todo un disco abierto centrado en  $a$ , en el plano complejo.

siendo dicha factorización no única, y donde  $m \geq 0$  es la multiplicidad de la raíz 0, mientras que  $w$  varía sobre las demás raíces de  $\varphi$  (incluyendo multiplicidad), las funciones  $p_w(z)$ , una para cada raíz  $w$ , son ciertos polinomios (aproximaciones de Taylor a la función  $-\log(1 - z/w)$ ), y  $g(z)$  es también entera. HADAMARD estudió las funciones de genero finito  $k$ , que se pueden caracterizar como aquellas para las cuales  $g$  y todos los polinomios  $p_w$  tienen grado  $\leq k$ . En el caso particular de  $f(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta^n / n^2$  se cumple que es entera y par (además sin raíz en 0, por lo que  $m = 0$ ), se tiene  $\varphi(z) = f(\sqrt{z})$  es entera con raíces  $(\pi n)^2$  para  $n \leq 1$ .

Algunos pudieran pensar que EULER tuvo mucha suerte en su demostración, otros que la intuición de este genio se adelantó a su tiempo, siendo capaz de vislumbrar un resultado fundamental en la historia de la matemática. La enorme "fortuna" de EULER consistió en que  $\varphi$  es una función de género cero, un hecho desde luego nada trivial a priori, por lo que  $g$  y los  $p_w$  son polinomios de grado cero, así que  $p_w$  es idénticamente cero para cada  $w = (\pi n)^2, n \leq 1$  mientras que el factor constante  $e^{g(z)}$  satisface  $1 = \varphi(0) = e^{g(0)} = e^{g(z)}$ , de forma que en el producto de Weierstrass todo factor es 1 a excepción de  $(1 - z/w)$  para cada  $w = (\pi n)^2, n \leq 1$ .

#### 4. EXTENSIONES AL PROBLEMA

El resultado de Euler consideraba el coeficiente que multiplica a  $x^2$  en el producto infinito, pero se puede hacer lo mismo para el resto de potencias. En particular el problema de Basilea se resuelve como la identidad  $c_1 = b_1$ , coeficientes definidos en las ecuaciones (1) y (2), pero del mismo modo se pueden obtener identidades generalizadas  $c_n = b_n$ , para todo  $n \leq 1$ . Si se considera el cálculo del término en  $x^4$  equivale a elegir dos factores (distintos) de la forma  $\frac{x^2}{\pi n^2}$  y tomar el resto igual a 1. Se obtiene en ese caso

$$\frac{1}{2\pi^4} \sum_{m \neq n} \frac{1}{m^2 n^2}$$

donde la suma se realiza sobre los pares de números naturales  $(m, n) \geq 1$  con  $m \neq n$ . Otra manera de expresar dicha suma se basa en considerar en primer lugar todos los pares de números naturales y restar a continuación aquellos en los cuales  $m = n$ . De este modo se puede utilizar la solución al Problema de Basilea para simplificar la expresión:

$$\sum_{\substack{m, n \geq 1 \\ m \neq n}} \frac{1}{m^2 n^2} = \left( \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \right) \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{36} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

Si se divide por  $2\pi^4$  y se iguala el coeficiente  $c_2 = \frac{1}{5!} = \frac{1}{120}$  del desarrollo en serie, se ve que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

En general, dado  $k \geq 2$ , con  $k \in \mathbb{Z}$  se designa por  $\zeta(k)$  a la suma de los recíprocos de orden  $k$  de los números naturales, que siempre resulta convergente:

$$\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \quad (10)$$

Para cuando EULER había resuelto el problema de Basilea, JAKOB BERNOULLI había fallecido hacía 29 años. De hecho su hermano JOHAN, que sabía que JAKOB había sido el que más en profundidad había trabajado en este problema manifestaba en una comunicación a EULER:

*“De este modo el deseo más ferviente de mi hermano se ha cumplido... ¡Si estuviera aquí!”*

En contraposición a las acusaciones sufridas por su falta de rigurosidad, la seguridad, clarividencia e intuición con la que EULER contaba estaban al alcance de muy pocos elegidos y confiaba con fe ciega en que el resultado al que había llegado era el correcto. Por ello continuó trabajando en nuevas demostraciones que hicieran de su demostración una verdad incuestionable.

Entre 1734 y 1748 EULER trabajó de forma incansable intentando depurar los resultados a los que había llegado. Fruto de sus investigaciones y siguiendo la notación utilizada en , EULER fue capaz de calcular todos los valores  $\zeta(2n)$  para  $n = 1, 2, 3, \dots$ , obteniendo los desarrollos siguientes:

$$\pi \cot \pi x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x^2}{x^2 - n^2}$$

$$\pi \cot \pi x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2\pi)^{2n} B_{2n}}{(2n)!} x^{2n}$$

donde  $B_{2n}$  son los denominados *números de Bernoulli*<sup>5</sup> que resultan ser números racionales definidos por la *función generatriz*  $G(x)$ :

$$G(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{B_2}{2!} x^2 + \cdots + \frac{B_n}{n!} x^n + \cdots, \text{ si } |x| < 2\pi$$

Se puede ver que

$$\frac{2x^2}{x^2 - n^2} = -\frac{2x^2}{n^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x^2}{n^2}} = -\frac{2x^2}{n^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{n^2}\right)^k$$

Por lo que identificando coeficientes, se obtiene la siguiente identidad

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2 \cdot (2k)!} B_{2k}$$

Por ejemplo

$$\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}; \quad \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9.450}; \quad \zeta(10) = \frac{\pi^{10}}{93.555}; \quad \dots$$

Todos los estudios sobre el problema de Basilea realizados por EULER culminaron en su obra "*Introductio in Analysin Infinitorum*" publicada en 1748. En la Proposición 168 del Capítulo X del Tomo Primero de dicha obra, un pletórico EULER expresaba de forma particular su más que justificado gozo:

*"He encontrado ahora y contra todo pronóstico una expresión elegante para la suma de la serie que depende de la cuadratura del círculo ... He encontrado que seis veces la suma de esta serie es igual al cuadrado de la longitud de la circunferencia cuyo diámetro es 1. Se hace patente así que de todas las series infinitas contenidas en la forma general*

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \text{etc.},$$

*que, cada vez que n fuere número par, se podrían expresar mediante la periferia del círculo  $\pi$ ; en efecto, la suma de la serie mantendrá siempre una proporción racional con  $\pi$ . Para que*

<sup>5</sup> Sabiendo que  $B_0 = 1$ , el resto de números se calcula de forma recursiva mediante la siguiente expresión:

$$B_k = -\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} \frac{B_i}{k+1-i}$$

*se perciba más claramente su valor, adjunto aquí varias sumas de tales series expresadas de manera más cómoda.”*

En general  $\zeta(2n)$  para  $n = 1, 2, 3, \dots$  es un múltiplo racional de  $\pi^{2n}$ . Una consecuencia que se deduce de este resultado es que, todos los números de la forma  $\zeta(2n)$  son *transcendentes*, ya que si alguno verificase una ecuación polinomial con coeficientes enteros, entonces se deduciría que  $\pi$  también satisface una ecuación de este tipo, lo cual no es posible puesto que el francés JOSEPH LIOUVILLE (1809-1882) demostró en 1844 la trascendencia de dicha constante.

## 5. ... ¡Y POR FIN UNA DEMOSTRACIÓN DEFINITIVA!

Lejos de abandonar el problema, Euler continuó trabajando con la firme intención de encontrar una demostración a todas luces incontestable. Para ello Euler necesitó de tres premisas fundamentales:

Demostrar la igualdad

$$\frac{1}{2}(\arcsen x)^2 = \int_0^x \frac{\arcsen t}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

la cual se resuelve mediante el cambio de variable  $u = \arcsen t$ .

Realizar el desarrollo en serie de la función  $\arcsen x$ . Para ello

$$\arcsen x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^x (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} dt$$

sustituyendo el integrando por su serie binomial e integrando término a término se obtiene

$$\begin{aligned} \arcsen x &= \int_0^x \left( 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}t^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}t^6 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2^4 \cdot 4!}t^8 + \dots \right) dt = \\ &= t + \frac{1}{2} \cdot \frac{t^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{t^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{t^7}{7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{t^9}{9} + \dots \Big|_0^x = \\ &= x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{x^9}{9} + \dots \end{aligned}$$

Demostrar la relación

$$\int_0^1 \frac{t^{n+2}}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{n+1}{n+2} \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}} dt \text{ para } n \geq 1$$

El término de la izquierda de la igualdad anterior  $J = \int_0^1 \frac{t^{n+2}}{\sqrt{1-t^2}} dt$ , se resuelve mediante integración por partes haciendo  $u = t^{n+1}$  y

$$dv = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt, \text{ para obtener}$$

$$\begin{aligned} J &= (-t^{n+1}\sqrt{1-t^2})\Big|_0^1 + (n+1) \int_0^1 t^n \sqrt{1-t^2} dt = \\ &= 0 + (n+1) \int_0^1 \frac{t^n(1-t^2)}{\sqrt{1-t^2}} dt = (n+1) \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}} dt - (n+1)J \end{aligned}$$

Resultando

$$(n+2)J = (n+1) \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}} dt,$$

obteniendo el resultado que buscaba.

Con estos mimbres EULER comenzó a elaborar la demostración definitiva. Inicialmente hizo  $x = 1$  en la premisa A., obteniendo:

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{2}(\text{arc sen } 1)^2 = \int_0^1 \frac{\text{arc sen } t}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

A continuación sustituyó  $\text{arc sen } t$  por su desarrollo en serie obtenido en la premisa B., e integró término a término:

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{8} &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt + \frac{1}{2 \cdot 3} \int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}} dt + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} \int_0^1 \frac{t^5}{\sqrt{1-t^2}} dt + \\ &\quad + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} \int_0^1 \frac{t^7}{\sqrt{1-t^2}} dt + \dots \end{aligned}$$

Sabiendo que  $\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} = 1$ , EULER calculó las otras integrales utilizando la premisa C.:

$$\begin{aligned}\frac{\pi^2}{8} &= 1 + \frac{1}{2 \cdot 3} \left[ \frac{2}{3} \right] + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} \left[ \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \right] + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} \left[ \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \right] + \dots = \\ &= 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots\end{aligned}$$

expresión en la que únicamente aparecen la suma de la serie de los recíprocos de los cuadrados de los números impares.

Para llegar al resultado esperado, EULER separó por un lado la suma de los términos impares y por otro la de los pares, resultando

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \left( 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots \right) + \left( \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots \right) = \\ &= \left( 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots \right) + \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \right)\end{aligned}$$

esto es,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

EULER despejó y llegó al resultado esperado:

$$\frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Esta segunda demostración no por ser más rigurosa deja de ser igualmente tan genial como la primera. Euler aplicó este resultado en campos muy dispares. Llegó a afirmar, que su “*principal uso*” era “*el cálculo de los logaritmos*”. EULER encontró un método eficaz de calcular logaritmos de senos, y declaraba:

“... con estas fórmulas, podemos encontrar tanto el logaritmo natural como el neperiano del seno y del coseno de cualquier ángulo, incluso sin conocer los senos y cosenos.”

## 6. EL NACIMIENTO DE LA FUNCIÓN ZETA

Si juzgásemos la importancia de un resultado o de una demostración por la cantidad de literatura que se ha escrito en torno a ella o la cantidad de obras derivadas posteriores que se han publicado, sin duda el Problema de Basilea debe ser uno de los problemas con mayúsculas de la historia de las matemáticas.

Todos las investigaciones de EULER desembocaron un siglo más tarde en los trabajos del alemán BERNHARD RIEMANN (1826-1866). RIEMANN publicó en la Academia de Berlín en noviembre de 1859 su genial artículo “*Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*” (puede traducirse como “*Sobre la cuantía de números primos menores que una cantidad dada*”), significando un antes y un después en el desarrollo de las matemáticas. A pesar de lo escueto de dicha publicación, la cual alcanzaba tan sólo la cantidad de seis páginas, nunca una relación calidad de resultados frente a cantidad de páginas publicadas pudo haber sido más notable en la historia de las matemáticas y las ciencias. RIEMANN presenta y estudia las propiedades de lo que pronto pasaría a denominarse *Función Zeta de Riemann*.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

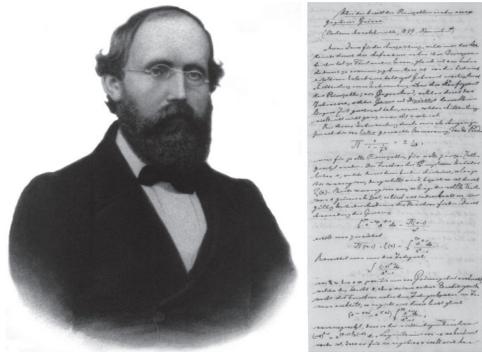


Figura 3. BERNHARD RIEMANN y portada del manuscrito “*Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*”

A diferencia de  $s$ ,  $s$  no tiene por qué ser un número natural, sino que puede tomar cualquier valor complejo cuya parte real sea estrictamente mayor que 1 (condición necesaria para que la serie converja y la función zeta sea analítica en esta región<sup>6</sup>). De forma paradójica, el hecho de que la variable pueda tomar cualquier valor complejo permite usar la función zeta de Riemann con la finalidad de predecir fenómenos rela-

<sup>6</sup> RIEMANN observó que la función zeta puede extenderse de forma única mediante continuación analítica a una función meromorfa en todo el plano complejo con un único polo en  $s = 1$ . Esta es la función que se considera en la *hipótesis de Riemann* (uno de los problemas aún sin resolver más famosos de las matemáticas). Para los complejos con  $Re(s) < 1$ , los valores de la función deben ser calculados mediante su ecuación funcional, obtenida a partir de la continuación analítica de la función.

cionados con la distribución de los números primos, hecho este un tanto sorprendente puesto que en la definición de  $\zeta(s)$  intervienen todos los números naturales.

Los trabajos de EULER ponen precisamente de manifiesto el origen de la relación de la función zeta con los números primos a través de la llamada *fórmula de Euler*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \quad (11)$$

donde se puede identificar  $\zeta(s)$  con un producto infinito indexado por los números primos. Para demostrar , si  $z$  es un número complejo de módulo estrictamente menor que 1, entonces la serie geométrica de razón  $z$  es convergente y su suma vale

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$$

De este modo, cada factor del producto de se puede expresar por su desarrollo

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \dots$$

Y expresar igualmente el término de la derecha de la fórmula de Euler como

$$\prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots\right) \\ \left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots\right) \dots \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \dots\right) \dots$$

Desarrollando los paréntesis, se obtienen los inversos de todos los posibles productos finitos de números primos. Como la descomposición en factores primos de cualquier número natural es única, cada sumando  $\frac{1}{n^s}$  aparece una única vez. Por ejemplo como  $20 = 2^2 \times 5$ , el término  $\frac{1}{20^s}$  se obtiene eligiendo  $\frac{1}{2^s}$  en el primer paréntesis,  $\frac{1}{5^s}$  en el segundo y 1 en todos los demás. De este modo puede observarse que ambos lados de la igualdad coinciden para cualquier valor de  $s$ .

## REFERENCIAS

CORDOBA, A., “*Disquisitio Numerorum*”, La Gaceta de la RSME, 4, pp. 249–260. Madrid, 2001.

DUNHAM, W., *Euler, El Maestro de todos los matemáticos*, Colección: La matemática en sus personajes, pp. 95–121, Ed. Nívola, Madrid, 2004.

EULER, L., *Introductio in Analysin Infinitorum*, Vol. 1, 1748.

FRESÁN, J., y RUÉ, J.J., *Los Números Trascendentes*, Colección: ¿Qué sabemos de ...?, núm. 42, pp. 112-121, Consejo Superior de Investigaciones Científicas; Los libros de la Catarata, Madrid, 2013.

GRANERO BELINCHÓN, R., “*El Problema de Basilea: historia y algunas demostraciones*”, La Gaceta de la RSME, Vol. 12, núm. 4, pp. 721-727, Madrid, 2009.

KNOPP, K., *Weierstrass's Factor-Theorem*, §1 in *Theory of Functions Parts I and II*, Two Volumes Bound as One, Part II. New York: Dover, pp. 1-7, 1996.

KRANTZ, S. G., *The Weierstrass Factorization Theorem*, §8.2 in *Handbook of Complex Variables*. Boston, MA: Birkhäuser, pp. 109-110, 1999.

MAZ'YA, V., and SHAPOSHNIKOVA, T., *Jacques Hadamard, A Universal Mathematician*, *History of Mathematics*, num. 14, American and London Mathematical Society, pp. 315–316, Ed. Board, Providence, 1998.

PÉREZ SANZ, A., *El Problema de Basilea. El año de Euler: 1707-2007*, *Revista SUMA*, núm. 55, pp. 95-102, Madrid, junio, 2007.

SÁNCHEZ MUÑOZ, J.M., *Euler y el Problema de Basilea*, *Historias de Matemáticas*, *Revista Pensamiento Matemático*, Universidad Politécnica de Madrid, Vol. V, núm. 1, pp. 27-56, abril, 2015.

