EN TORNO AL INFINITO MATEMATICO

Desde hace más de 2.000 años, los matemáticos se afanan por reducir, someter y entender al infinito, sin haber conseguido otra cosa que edificar hermosas teorías llenas de agudeza, pero cuyos resultados, muchos de ellos contradictorios, han dado lugar a lo que se conoce con el nombre de «Antinomios Cantorianos», difíciles de superar y que aun hoy día siguen abiertos a discusión.

Muchos han sido los que se han referido a él en sus escritos, pero fué Jorge Cantor, matemático alemán de mediados del siglo pasado, el que emprendió la tarea de introducir en las Matemáticas el Infinito Actual, es decir, una cantidad que no solamente fuera susceptible de alcanzar cualquier límite, sino que se la consideraba como si los hubiera pasado.

Cantor consiguió además comparar diversos grados de infinitud, «creando» toda una jerarquía de números infinitos a los que denominó «Ordinales Transfinitos».

Hasta entonces, el infinito había sido una cantidad capaz de alcanzar cualquier límite, sí, pero de quien no se podía decir que los hubiera dejado atrás.

Este misticismo ha dado lugar a una divergencia de opinión entre los matemáticos y como consecuencia la separación en dos grupos. Uno, el grupo *intuicionista*, acaudillado por Breuwer, genial matemático holandés, y el otro formado por los *idealistas* seguidores de Cantor. Para los primeros el infinito actual, es decir, el infinito terminado y estático es, al sentir de Gaus, una «façon de parler». Para los segundos tal infinito existe y ha existido siempre.

No me considero con méritos suficientes para enjuiciar a intuicionistas e idealistas, por lo que trataré de exponer sucintamente y de la manera más clara que me sea posible, los argumentos que esgrimen en su favor los unos y los otros.

Los *intuicionistas* aducen que ¿cómo han de interpretarse y si tiene algún sentido enunciar teoremas que no admiten una conclusión verificable? Es posible, dicen, razonar siquiera sobre objetos que no pueden ser definidos por un número finito de palabras? Y al hablar de ellos ¿se está seguro de no pronunciar más que palabras vacías de sentido?

Ahora bien, ¿por qué rehusan admitir objetos que no pueden ser definidos sino con un número infinito de palabras? La respuesta es sencilla, porque para ellos sólo existe el Infinito Actual. Me explicaré. Consideran que un objeto tiene «Ser» si ha sido previamente pensado, lo cual implica un sujeto pensante no independiente de él, y como este sujeto sólo puede estar representado por el hombre, siendo éste

como es, finito por naturaleza, el infinito no puede tener otro sentido que la posibilidad de crear tantos objetos como se quieran. No hay, pues, Infinito Actual y cuando se habla de un conjunto infinito nos referimos simplemente a un conjunto al cual se le puede agregar incesantemente nuevos elementos.

Los idealistas, no admitiendo esta argumentación, dicen á su vez, que un hombre por muy locuaz que fuera no alcanzaría en su vida a pronunciar más de seiscientos millones de palabras; pero ¿ya por eso vamos a eliminar de la ciencia aquellos objetos que necesiten para su definición una palabra más de los seiscientos millones? Y si no los excluímos, ¿por qué excluir aquellos otros que no puedan ser enunciados sino por infinitas palabras, ya que tanto unos como otros están fuera del alcance de la Humanidad?

Esta manera de ver las cosas no conmueve a los Breuwerianos, que replican a su vez, que por muy hablador que un hombre sea la Humanidad lo será aún más y como no sabemos lo que ésta podrá durar, no se puede limitar «a priori» el campo de sus investigaciones.

¿Qué quieren expresar al negar todo sentido a teoremas que no puedan ser verificados? Pongamos un ejemplo: «Existe el mismo número de puntos en un segmento que en el espacio entero». No, niegan los intuicionistas, porque aunque generación tras generación emprendieran la tarea de comprobarlo no lo podrían verificar y como esto sólo puede realizarse con números finitos, inferimos que todo teorema acerca de los números infinitos, en especial a los «ordinales y cardinales transfinitos», no puede ser más que una manera abreviada de enunciar proposiciones respecto de los números finitos, de otro modo, concluyen que el teorema carece de sentido o es falso.

Pero los idealistas contestan a esto, diciendo que las demostraciones se las puede considerar como existentes en una inmensa nave, pero que nosotros no somos dados de poder distinguir aquéllas con las que un objeto quedaría perfectamente determinado.

Los intuicionistas, pues, definen los conjuntos por «extensión», es decir, que un conjunto se construye por la adición sucesiva de miembros, combinando éstos en un cierto sentido aparecen nuevos miembros, por la adjunción de estos nuevos, otros más nuevos aún, y así «ad infinitum», si no hay motivo para detenerse.

Por el contrario, los cantorianos definen los conjuntos por «comprensión», ya que resulta imposible hacerlo por «extensión» o lo que es lo mismo, parten de una colección ya preexistente.

Pero dejemos las diferencias habidas y por haber entre estas dos escuelas y pasemos a considerar más de cerca los extraordinarios resultados a que conduce la teoría del infinito.

Antes de entrar de lleno en ella aclararemos lo que se entiende por una correspondencia «biunívoca». La designación «uno-uno» parece preferible, pero adoptaremos la otra por ser usual en castellano.

Se dice que existe una correspondencia de tal clase entre dos conjuntos A y B, cuando a cada elemento «a» de A le corresponde uno y sólo uno «b» de B y cada elemento «b» de B tiene un correspondiente y sólo uno «a» de A.

Aclaremos con un ejemplo: Imaginemos un teatro con un cierto número de asientos, el número es lo de menos. Si el dueño quisiera saber poco más o menos cuanta gente hay, no necesitará contarlos, ya que si ve que no sobra ningún asiento, pensará que el número de espectadores será igual al de butacas. Dicho de otro modo, existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto formado por los asientos y el formado por los espectadores. Si hubiera espectadores de pie, concluiría que había más de éstos que butacas y finalmente si veía asientos vacíos admitiría que el número de espectadores era menor que el de asientos. En consecuencia, la Matemática del Infinito, substituye el proceso de contar por la coordinación de conjuntos. Pero es claro que no podremos demostrar, como en el caso de los conjuntos finitos, la correspondencia que existe entre «todos» los elementos de un conjunto con los del otro, incluyendo hasta el último elemento, ya que, no hay último elemento en ninguno de ellos. Por otra parte no resulta difícil para nuestra inteligencia superar esta dificultad.

Escribamos la serie natural de los números y la de sus cuadrados en forma que se correspondan:

1	2	3	4	5	6..........	N..........
1	4	9	16	25	36.......	N2..........

(Los puntos suspensivos indican que continua indefinidamente, es decir, sin fin).

No erramos al decir que a cada número N del primer conjunto, le corresponde otro N2 en el segundo que será su cuadrado; así como a cada N2 del segundo, tiene su correspondiente N en el primero.

Creo que es el momento de introducir la noción de conjunto infinito. A nosotros nos basta, sacrificando la rigurosidad, decir que es aquél que no puede enumerarse en un período finito de tiempo. Algunos habrán pensado ya en el número de hojas de todos los árboles, o en el de granos de arena, o en el de gotas de agua. Pues no, ni sumados, ni multiplicados esos tres conjuntos llegarían a formar uno infinito. ¿Dónde encontrar, pues, uno que lo sea? Desde luego que no en nuestro mundo de experiencias físicas. ¿Pero qué hay de la colección tan familiar para nosotros de los números naturales? Este es un conjunto que llena todos los requisitos, ¿pues no es cierto que si nos pusiéramos a contar transmitiéndolo a nuestros hijos y a los hijos de nuestros hijos, etc., ni nosotros, ni ninguno de nuestros descendientes agotaría los que quedaran? Cantor demostró que el número de números finitos, es infinito. Se suele representar por el Aleph sub-cero hebreo y corresponde al menor número Transfinito. Para mayor claridad lo designaremos por A1. Pero la cosa no acaba aquí, pues el mismo Cantor demostró que el conjunto de los números pares tiene también el número transfinito A1, y el de los impares (podríamos seguir entresacando números) y el de todos

los números racionales. Seguro que alguien debe estar pensando ya que algo raro ocurre aquí. ¿De manera que existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto de los números naturales y una parte del mismo? ¡Pero es tanto como decir que el *todo es igual a una de sus partes*! ¿Y no sabemos de buena tinta, porque así nos lo enseñaron los maestros de la niñez, que el todo era igual a la suma de sus partes y por consiguiente mayor que cualquiera de ellas? ¡Ah! Pero es que, sin duda, olvidamos que tratamos con conjuntos infinitos, y este principio no es válido sino para los finitos.

Volvamos otra vez a nuestra sala de espectáculos, en la que por cierto se ha hecho una importante modificación: el número de butacas es ya infinito. La empresa pone a la venta sus localidades, pero con una salvedad, a saber, que sólo se venden las localidades pares. Si una vez comenzada la función el dueño pudiera abarcar con una mirada toda la sala, se llevaría mayúscula sorpresa al comprobar que estaba «llena»: ni un solo asiento sin ocupar.

Cómo engendrar números mayores que A1? Mejor dicho. Existen números mayores que A1? Pensemos en el conjunto formado por los números «Reales» (conjunto que no sólo incluye a los racionales, sino también a los irracionales). Cantor demostró asimismo que el campo de los números reales tiene un número transfinito mayor que A1. La demostración, en esencia, es como sigue:

Supongamos que se ha establecido una correspondencia biunívoca entre los números naturales y los reales comprendidos entre «cero» y «uno» y probemos que existe un número, también comprendido entre «cero» y «uno», que no puede estar incluído en la correspondencia arriba indicada.

Números naturales		Números reales						
1	——	0,	B1	B2	B3	B4	B5	B6 ....
2	——	0,	C1	C2	C3	C4	C5	C6 ....
3	——	0,	D1	D2	D3	D4	D5	D6 ....
4	——	0,	E1	E2	E3	E4	E5	E6 ....
5	——	0,	F1	F2	F3	F4	F5	F6 ....
6	——	0,	G1	G2	G3	G4	G5	G6 ....
—	——	....						
—	——	....						
—	——	....						

Con B1, B2, B3..., designamos las cifras sucesivas del primer número real expresado en su forma decimal ilimitada. Por C1, C2, C3..., las del segundo número, y así sucesivamente. Recuérdese que en el cuadro de la derecha hemos supuesto que aparecen todos los números reales comprendidos entre «cero» y «uno». Pero construyamos un número al que llamaremos 0, N1, N2, N3, N4, N5, N6..., del siguiente modo. A lo largo de la diagonal de la figura tomemos para N1 una cifra diferente a B1; N2 diferente a C2; N3 diferente a D3 y así sucesivamente. Evidentemente este número no se encontrará en el cuadro, ya que difiere del primero en la primera cifra, del segundo en la segunda, del tercero en la tercera, y en general diferirá del n-ésimo número en la n-ésima cifra. De aquí se sigue que la suposición de haber establecido una correspondencia biunívoca entre los números naturales y los reales, es falsa y por lo tanto el número transfinito que representa este segundo conjunto es mayor que el del primero. Cantor le asignó el símbolo «C» y se le considera como el número del «Continuo».

Podríamos sentir la tentación de identificarlo con A2, segundo ordinal transfinito. Quizás sea cierto, pero hasta el momento nadie lo ha demostrado. Dicho de otro modo, «puede» que exista un número mayor que A1 y menor que «C»; pero esta cuestión está aún sin resolver.

Cabría seguir construyendo números aún mayores que «C», pero no quiero cansar al lector con nuevas demostraciones que podrían crear cierto confusionismo en esta Matemática tan abstracta como asombrosa.

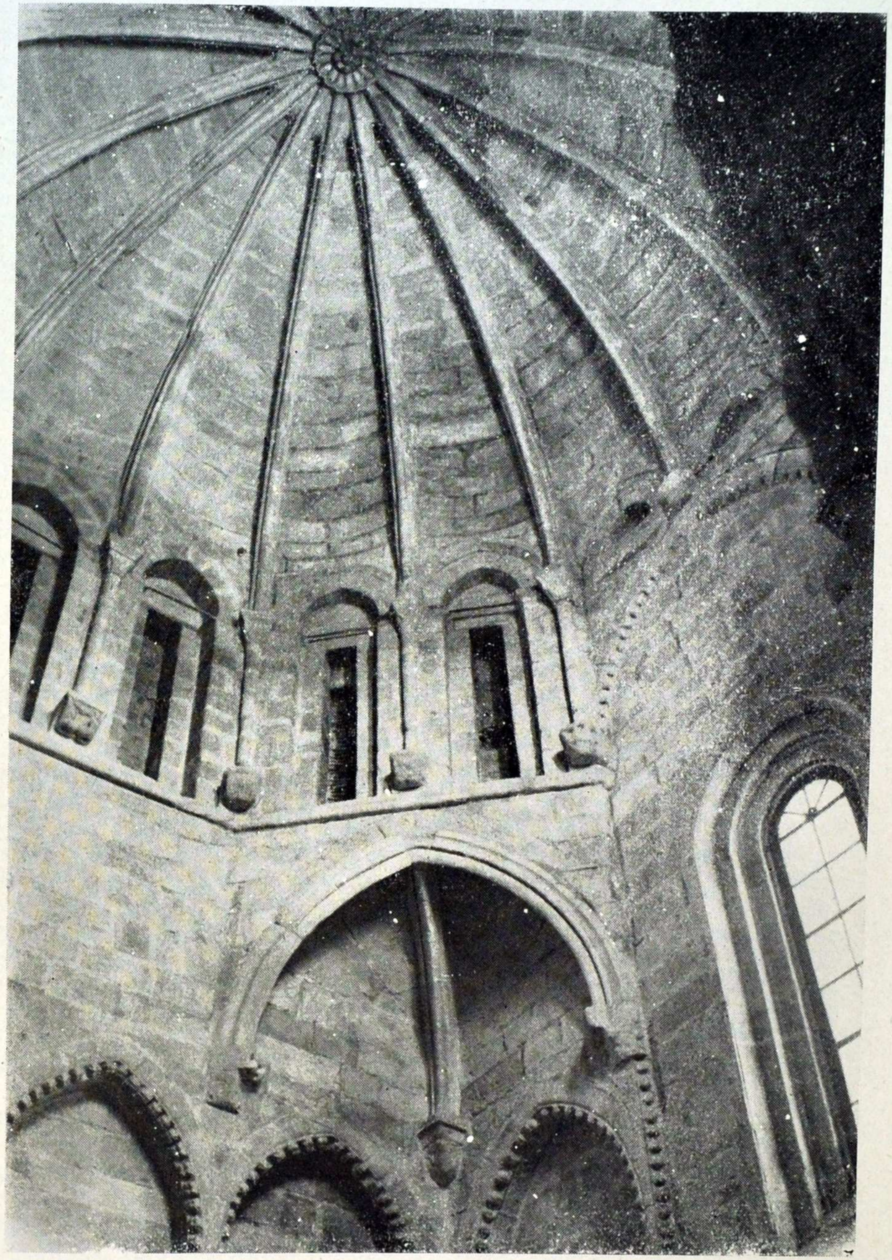
Para terminar vamos a exponer cuatro Paradojas, la última de las cuales, es independiente del concepto del infinito, pero que entra dentro del campo de la Lógica Matemática.

La primera, citada por Bertrand Russell en algunas de sus obras, dice así. «Cual es el menor número natural que no puede ser definido por una frase de menos de cien palabras»?

Este número existe, ya que con cien palabras no se puede sino construir un número finito de frases, a menos que se piense que el número de palabras del diccionario es infinito. Entre estas frases, habrá seguramente algunas carentes de sentido, o que no definan ningún número. Otras por el contrario, definirán alguno. Entonces el número de los naturales susceptibles de ser definidos, será pues limitado; de modo que habrá números que no puedan serlo y entre ellos tendrá que haber uno que será el menor de todos.

Pero por otra parte este número no existe, pues su existencia implicaría contradicción, al quedar definido por la frase entre comillas de diez y nueve sílabas.

La segunda, citada también por Russel en sus escritos se la conoce con el nombre de «Tristram Shandy», escritor que tardó un año en escribir los acontecimientos de su primer día de vida y se lamentaba de que a ese paso no podría terminar nunca su biografía. Sin embargo, se sostiene que si hubiera vivido eternamente no hubiera



ALBUM EXTREMEÑO.—Cúpula de la Sala Capitular (Siglo XIII) de la Catedral de Plasencia (Foto Mas) quedado ninguna parte de su vida sin escribir. Pongámoslo en forma esquemática:

(1) «Tristram Shandy» escribe en un año los acontecimientos de un día.

(2) La serie de días y años no tiene último término.

(3) Los acontecimientos del n-ésimo día los escribe en el n-ésimo año.

(4) Cualquier día dado es el n-ésimo, para un valor apropiado de «n».

(5) Por lo tanto se escribirá sobre cualquier día señalado.

(6) Existe, pues, una relación biunívoca entre los tiempos de los sucesos y los tiempos en que se escriben, y como el todo y la parte tienen el mismo número de términos, no quedará sin escribir ninguna parte de su biografía.

La tercera se debe a Zenón de Elea y dice así: «El movimiento es imposible». La conclusión es harto sorprendente, pero el argumento es bastante convincente como vamos a ver.

Para ir de un punto a otro, hemos de recorrer primero la mitad de la distancia que los separa, después la mitad de la que queda, más tarde la mitad de la que entonces queda y así sucesivamente. El «así sucesivamente», implica que hay que repetir el proceso un número infinito de veces, y por muy pequeño que sea el espacio a recorrer exigirá un período finito de tiempo. Y, como decía el eleata, la suma de un número infinito de intervalos finitos de tiempo, es infinita. En consecuencia, nunca podremos ir de un punto a otro por muy cerca que éstos estén.

La cuarta y última, como dije, es de naturaleza diferente, pero bastante sugestiva. Con un poco de atención no resulta difícil de entender.

Cada adjetivo tiene un significado. Unos se pueden aplicar al mismo y otros no. Por ejemplo: «corta» es una palabra corta, pero «larga» no es una palabra larga; «polisílaba» es una palabra polisílaba, pero «monosílaba» no es una palabra monosílaba. Podemos, según este criterio, dividir los adjetivos en dos grupos: los que se califican a sí mismos y los que no se califican. A los primeros los llamaremos «Autológicos» y a los segundos «Heterológicos».

Pero consideremos la palabra «heterológico». Esta palabra es un adjetivo que sólo podrá ser o «autológico» o «heterológico». Si «heterológico» es autológico, la afirmación de que «heterológico es autológico», dice que puesto que «heterológico» es autológico, y no heterológico, no se aplica a sí mismo. Y si no se aplica a sí mismo ha de ser heterológico, según la definición que hemos dado de esta palabra. Por otro lado si «heterológico», es heterológico la misma afirmación de que «heterológico» es heterológico indica que se aplica a sí mismo. Y si se aplica a sí mismo ha de ser autológico, según la significación que hemos dado a esta palabra. La situación resulta bastante embarazosa, pues como dijimos un adjetivo sólo puede ser o «autológico» o «heterológico», pero no ambos a la vez. Y no obstante acabamos de ver que si «heterológico» es autológico, no es autológico, sino heterológico y si «heterológico», es heterológico, no es heterológico, sino autológico

Sólo nos queda para finalizar, el preguntar cual de los dos grupos a que nos referíamos al principio tiene una actitud más acertada. Creo que la respuesta es una cuestión subjetiva. Todos los que se hayan interesado por este debate, deberán alistarse en el partido que esté más en consonancia con sus ideas.

En cuanto a mí, considero en el hombre una presunción el intentar penetrar en un dominio que sólo pertenece a Dios.

PEDRO LUIS ROMERO MONTESINO

JUDAS

La faz taheña, lúbrico rescoldo;

barbotante, la lengua viperina;

sucia la frente de rencor y polvo,

zaguero y solo, el de Keriot camina ..

De su alma, en la lóbrega sentina,

se oculta, artero, su designio torvo

y un horror de tragedia se adivina

en el fulgor siniestro de sus ojos.

Treinta siclos de plata, relumbrantes,

Helkias puso en sus convulsos dedos

y los labios, sumidos, repugnantes,

babearon el beso traicionero...

¡Los modernos Judas vergonzantes,

siguen así besando al que vendieron!

ARTURO ENRIQUE SANCHEZ